

$$3) y'' + 2y' + y = x^{-1}e^{-x} \quad u(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \text{ dir.}$$

Sabitin de\u011frimini u\u011fulanarak

$$y(x) = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) x e^{-x} \text{ \u0131ek aranmas\u0131 i\u015fin } c_1'(x) = ?, c_2'(x) = ?$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Bunun i\u015fin } c_1' e^{-x} + c_2' x e^{-x} &= 0 \\ -c_1' e^{-x} + c_2'(e^{-x} - x e^{-x}) &= \frac{e^{-x}}{x} \end{aligned} \right\} \text{ olur. Di\u011ferle}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ni\u015fe } c_1' + c_2' x &= 0 \\ -c_1' + c_2'(1-x) &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \text{ olur. Taraf tarafa toplan\u0131rsa}$$

$$c_2'(x+1-x) = \frac{1}{x} \Rightarrow c_2' = \frac{1}{x} \quad c_2(x) = \ln x + c_2 \text{ olur.}$$

$$c_1' = -c_2' x \Rightarrow c_1' = -\frac{1}{x} \cdot x \Rightarrow c_1' = -1 \Rightarrow c_1(x) = -x + c_1 \text{ olur.}$$

0 halde genel s\u00f6z\u00fcm

$$y(x) = (-x + c_1) e^{-x} + (\ln x + c_2) x e^{-x}$$

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - x e^{-x} + x e^{-x} \ln x \Rightarrow y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + x e^{-x} \ln x$$

olur.

$$4) 3x^2 y'' + 4x y' - 2y = \ln x^3 \quad \text{Cauchy Euler dir } x = e^t, t = \ln x$$

d\u00f6n\u00fcr\u00fcm\u00fc u\u011ful. de\u011flem sabit katsay\u0131 de\u011flemine d\u00f6n\u00fcs\u00fcr.

$$(3x^2 D^2 + 4x D - 2)y = 3 \ln x \quad x D y = D_t y \quad x^2 D^2 y = D_t(D_t - 1)y \text{ olur.}$$

$$(3 D_t(D_t - 1) + 4 D_t - 2)y = 3t \quad (3 D_t^2 + D_t - 2)y = 3t \text{ olur}$$

$$(3 D_t^2 + D_t - 2)y = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \quad (3\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{3} \quad \lambda_2 = -1 \Rightarrow u(t) = c_1 e^{\frac{2}{3}t} + c_2 e^{-t} \text{ olur. } b(t) = 3t \text{ old\u0131.}$$

$$v(t) = At + B \text{ \u0131ek aran\u0131r. } v' = A \quad v'' = 0 \Rightarrow 3y'' + y' - 2y = 3t \text{ de yerine}$$

$$\text{yaz\u0131l\u0131rsa } 3 \cdot 0 + A - 2(At + B) = 3t \Rightarrow -2At + A - 2B = 3t \Rightarrow -2A = 3 \Rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

$$A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{3}{4} \text{ olur. } v(t) = -\frac{3}{2}t - \frac{3}{4} \text{ olur } y(t) = u(t) + v(t)$$

$$y(t) = c_1 e^{\frac{2}{3}t} + c_2 e^{-t} - \frac{3}{2}(t+1) \Rightarrow t = \ln x \text{ yaz\u0131l\u0131rsa } y(x) = c_1 x^{\frac{2}{3}} + c_2 x^{-1} - \frac{3}{2}(\ln x + 1) \text{ olur.}$$

7) $(1-x)y'' - y' + y = 0$ $y(0)=1, y'(0)=0$
 $x=0$ degenlerin bir adi noktasıdır?

$$y'' - \frac{1}{1-x} y' + \frac{1}{1-x} y = 0 \text{ olur.}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, |x| < 1, -1 < x < 1 \text{ olduđu ve}$$

$x=0$ bu aralıktadır bir adi noktadır.

Bu noktada komsulukta deklemin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

şeklinde seri sözümlü vardır. Şimdi a_0, a_1, a_2, a_3 sabitlerini bulalım

$$y(0) = a_0, y'(0) = a_1, y''(0) = 2a_2, y'''(0) = 6a_3 \text{ olur}$$

$y(0)=1 \Rightarrow a_0=1, y'(0)=0 \Rightarrow a_1=0$ olur. Bunları deklemlerde yerine yazarsak

$$(1-0)y''(0) - y'(0) + y(0) = 0 \Rightarrow y''(0) - 0 + 1 = 0$$

$$y''(0) = -1 \Rightarrow 2a_2 = -1 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{2} \text{ olur. Denklemi}$$

bir kez daha türevini alırsak

$$-y'' + (1-x)y''' - y'' + y' = 0 \Rightarrow -2y''(0) + (1-0)y'''(0) + y'(0) = 0$$

$$(-2)(-1) + y'''(0) + 0 = 0 \Rightarrow y'''(0) = -2 \Rightarrow 6a_3 = -2 \Rightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$$

0 kolda serinin

$$y(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 - \dots \text{ olur.}$$

5) $2xy'' + (1-4x)y' + (2x-1)y = e^x$ Merteye dörümne ile sözer set $y = u \cdot e^x$, $y' = u'e^x + ue^x$

$y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$ olur. Denklemdede yerine yazılırsa

$$2x(u'' + 2u' + u)e^x + (1-4x)(u' + u)e^x + (2x-1)ue^x = e^x \text{ olur.}$$

Dözerlerirse

$$2xu'' + u' = 1 \Rightarrow u' = v, u'' = v' \text{ olur. Denklemler}$$

$$2xv' + v = 1 \Rightarrow v' + \frac{1}{2x}v = \frac{1}{2x} \quad \lambda(x) = e^{\int \frac{1}{2x} dx} = e^{\frac{1}{2} \ln x} = \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x} \cdot v = \int \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2x} dx + C_1, \quad \sqrt{x} \cdot u' = \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + C_1,$$

$$\sqrt{x} u' = \sqrt{x} + C_1 \Rightarrow u' = 1 + \frac{C_1}{\sqrt{x}} \Rightarrow u = \int \left(1 + \frac{C_1}{\sqrt{x}}\right) dx + C_2$$

$u = x + 2C_1\sqrt{x} + C_2$ olur Böylece parsel sötim

$$y = ue^x \Rightarrow y = (x + 2C_1\sqrt{x} + C_2)e^x = 2C_1\sqrt{x}e^x + C_2e^x + xe^x \text{ olur.}$$

6) $y^2 = c^2x^2 + 1$ c ye göre kısmi türev alınır ise

$0 = 2cx^2 \Rightarrow c = 0$ olur. Yerine yazılırsa $y^2 = 1$ tekil yerleri bulunur. Tekil sötim mi?

$y^2 = c^2x^2 + 1$ x'e göre türev alınır ise

$2yy' = 2c^2x \Rightarrow c^2 = \frac{yy'}{x} \Rightarrow y^2 = c^2x^2 + 1$ de yerine yazılırsa dif den $y^2 = \frac{yy'}{x} \cdot x^2 + 1$ şeklinde bulunmuş olur. $y^2 = 1 \Rightarrow 2yy' = 0$ olur. Denklemdede yerine yazılırsa

$1 = \frac{0}{x} \cdot x^2 + 1 \Rightarrow 1 = 1$ olur yani denklemin sağladığından tekil sötimdir. Zarf mıdır? $y^2 = 1$ tekil sötim

$y^2 = c^2x^2 + 1$ de yerine yazılırsa $1 = c^2x^2 + 1 \Rightarrow c^2x^2 = 0$ Burada c ikinci derecede katlı kök olduğundan zarftır.